

El problema de Reynolds: transició subcrítica a la turbulència

Álvaro Meseguer i Fernando Mellibovsky

Departament de Física Aplicada, Universitat Politècnica de Catalunya

Jordi Girona 1-3, 08034 Barcelona

alvar@fa.upc.edu

Resum

Fa 125 anys, Osborne Reynolds, matemàtic i professor d'enginyeria de la Universitat de Manchester, va publicar el seu treball experimental i teòric sobre la transició a la turbulència de fluids en moviment dins de canonades. Els experiments publicats per Reynolds van plantejar moltes qüestions i van introduir nous conceptes com ara el nombre de Reynolds adimensional, la criticitat i la intermitència turbulenta. L'article de Reynolds va suposar un gran salt a la comprensió del fenomen de transició de fluids en moviment. Després d'aquests 125 anys, encara es desconeixen els mecanismes físics responsables de la transició a la turbulència a l'interior d'una canonada. La simplicitat del problema contrasta notablement amb l'enorme dificultat que suposa entendre'n la dinàmica, desafiant físics, matemàtics i enginyers del segle passat i del present. Algunes de les qüestions més fonamentals han començat a veure la llum fa quatre o cinc anys, gràcies a la col·laboració de grups de recerca britànics, alemanys i catalans.

1 Introducció

La transició a la turbulència és un dels problemes més complexos de la física clàssica. Determinar les causes per les quals el moviment d'un fluid es torna turbulent és molt important en moltes branques de la física aplicada o l'enginyeria. Un exemple familiar de les conseqüències de la turbulència el tenim durant el vol d'un avió. Depenent de les condicions climatològiques, el fort vent que envolta l'avió es torna irregular, i produeix alteracions a les propietats d'estabilitat del vol. Un exemple més quotidià el tenim en obrir una aixeta domèstica. Si obrim l'aixeta una mica, i deixem que l'aigua flueixi a poc a poc, podrem observar que el flux de sortida és estacionari i suau, *i. e.*, flux laminar. Si després obrim l'aixeta una mica més, començarem a veure canvis a l'estructura del doll de sortida. Algunes vegades, l'aigua surt de manera irregular i la canonada fa soroll, *i. e.*, flux turbulent.

Amb el fenomen que acabem de descriure, la primera qüestió que ens ve a la ment és: *quin és el cabal màxim de la canonada sota condicions de laminaritat?* És a dir, fins a quin valor es pot augmentar el cabal sense que el doll es torni turbulent? Aquesta qüestió la va plantejar per primera vegada Osborne Reynolds, matemàtic i professor d'enginyeria de la Universitat de Manchester, el qual va formular el problema de la transició a la turbulència a l'interior de canonades. Al començament dels 1880, Reynolds va portar a terme un ventall d'experiments amb canonades de diferents radis. Va sotmetre l'aigua d'aques-

tes canonades al mateix gradient de pressió i va mesurar la velocitat màxima al centre de la canonada en condicions de laminaritat, augmentant a poc a poc el cabal fins que el flux es tornava turbulent. Per detectar la transició, Reynolds va fer servir un colorant a l'entrada de la canonada. El resultat que va obtenir va ser que la transició tenia lloc a diferents velocitats màximes per a diferents radis. La genialitat de Reynolds va ser adonar-se que el producte de la velocitat de transició pel radi adoptava el mateix valor, aproximadament. Experiments posteriors van confirmar que la viscositat cinemàtica del fluid també tenia un paper important en el fenomen de transició. La conclusió de Reynolds va ser que la transició tenia lloc quan el resultat de multiplicar la velocitat màxima pel radi i dividir per la viscositat adoptava el mateix valor. Aquesta llei, anomenada *lleï de similitud dinàmica*, es pot resumir amb la definició següent de l'anomenat *nombre de Reynolds*:

$$Re = \frac{aU}{\nu}, \quad (1)$$

on U és la velocitat màxima al centre de la canonada, a és el radi i ν és la viscositat cinemàtica del fluid.

El treball de Reynolds es va publicar en una de les revistes científiques més prestigioses: els *Philosophical Transactions* de la Royal Society de Londres. Aquest article va tenir un gran impacte en la comunitat científica especialitzada en dinàmica de fluids i encara se cita en moltes publicacions actuals com a referent essencial. Reynolds va veure que el que controlava l'estabilitat del fluid

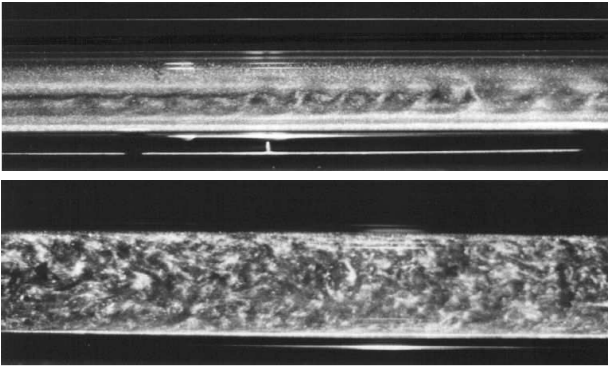


Figura 1: Marc superior: inici de la transició a la turbulència en una canonada experimental per a $Re = 5535$. Marc inferior: turbulència plenament desenvolupada per a $Re = 9230$. El fluid es mou d'esquerra a dreta

no era el valor específic dels paràmetres absoluts U , a o ν , sinó una combinació adimensional d'aquests. El concepte de paràmetre adimensional apareix per primera vegada amb l'article de Reynolds.

La figura 1 mostra dos instants del fenomen de transició a una canonada experimental. Per visualitzar el flux, s'afegeix pols d'alumini al fluid i després s'il·lumina de manera que podem veure la reflexió de la llum a les partícules en moviment. En el marc superior podem veure la primera fase de transició per a $Re = 5535$, mentre que el marc inferior mostra un flux completament turbulent per a $Re = 9230$, caracteritzat per un desordre espacial temporal a tot el domini.

Tornem ara a la nostra qüestió inicial. Com que la transició no ve governada pel valor absolut dels paràmetres geomètrics, físics o cinemàtics del problema, sinó per la combinació adimensional del nombre de Reynolds, la pregunta adient és: *quin és el valor de Re pel qual el flux a la canonada es torna turbulent?* Aquest valor porta el nom de *nombre de Reynolds crític* o Re_c .

En aquest treball introductorí mostrarem com es formula el problema de la criticitat del flux en una canonada. Veurem les dificultats matemàtiques que comporta resoldre l'anàlisi d'estabilitat del flux i mostrarem els darrers avanços en la comprensió d'un dels fenòmens més fonamentals de la dinàmica de fluids.

2 Formulació del problema

Considerem el moviment d'un fluid newtonià incompressible de viscositat dinàmica μ i densitat ρ a l'interior d'una canonada cilíndrica de radi a i longitud infinita. El moviment del fluid l'indueix un gradient de pressió axial $dp_0/dz = -\pi_0$ uniforme i conegut. La velocitat del fluid

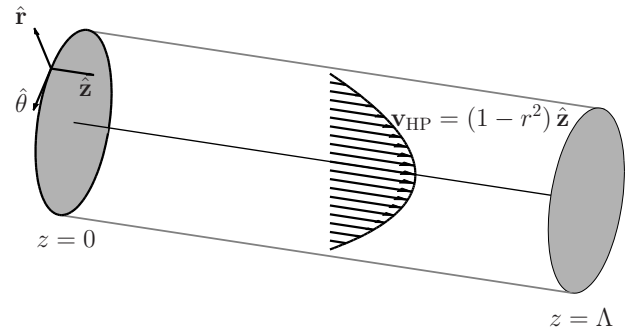


Figura 2: Domini i flux adimensionalitzats del FHP

v ve determinada per les equacions de Navier-Stokes:

$$\partial_t v + (v \cdot \nabla)v = \rho^{-1}(\pi_0 \hat{z} - \nabla p + \mu \Delta v), \quad (2)$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (3)$$

on la velocitat satisfà condicions de contorn homogènies *no lliscants* a la paret $v = 0$. L'equació (2) té dimensions d'acceleració LT^{-2} . Per adimensionalitzar el problema, escollirem $[L] = a$, $[T] = 4\mu/\pi_0 a$, i $[M] = \rho a^3$ com a unitats de longitud, temps i massa, respectivament. És a dir, definim les noves variables adimensionals t^* , x^* , v^* i p^* com

$$(t, x, v, p) = \left(\frac{4\mu}{\pi_0 a} t^*, a x^*, \frac{\pi_0 a^2}{4\mu} v^*, \frac{\rho \pi_0^2 a^4}{16\mu^2} p^* \right). \quad (4)$$

Introduint les noves variables a l'equació (2), les equacions de Navier-Stokes adimensionalitzades són:

$$\partial_t v + (v \cdot \nabla)v = \frac{16\mu^2}{\pi_0 a^3 \rho} \hat{z} - \nabla p + \frac{4\mu^2}{\pi_0 a^3 \rho} \Delta v, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (6)$$

on hem tret el símbol $*$ de les noves variables per claredat. Si ara definim el *nombre de Reynolds* adimensional com

$$Re = \frac{\pi_0 a^3 \rho}{4\mu^2}, \quad (7)$$

l'equació (5) queda simplificada de la manera següent:

$$\partial_t v + (v \cdot \nabla)v = \frac{4}{Re} \hat{z} - \nabla p + \frac{1}{Re} \Delta v, \quad (8)$$

i s'anomena *equació de Navier-Stokes* per al flux en una canonada. Donada la geometria del problema, utilitzarem coordenades cilíndriques (r, θ, z) , on el camp de velocitats té l'expressió

$$v(r, \theta, z, t) = u \hat{r} + v \hat{\theta} + w \hat{z} = (u, v, w), \quad (9)$$

amb els vectors unitaris \hat{r} , $\hat{\theta}$ i \hat{z} en les direccions *radial*, *azimutal* i *axial*, respectivament. Les expressions explícites

de (8) i (6) en aquest sistema de coordenades són:

$$\partial_t u + \tilde{\nabla} u - \frac{v^2}{r} = -\partial_r p + \frac{1}{\text{Re}} \left(\tilde{\Delta} u - 2 \frac{\partial_\theta v}{r^2} - \frac{u}{r^2} \right) \quad (10)$$

$$\partial_t v + \tilde{\nabla} v - \frac{uv}{r} = -\frac{\partial_\theta p}{r} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\tilde{\Delta} v + 2 \frac{\partial_\theta u}{r^2} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (11)$$

$$\partial_t w + \tilde{\nabla} w = \frac{4}{\text{Re}} - \partial_z p + \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\Delta} w, \quad (12)$$

$$\partial_r u + \frac{\partial_\theta v}{r} + \partial_z w + \frac{u}{r} = 0, \quad (13)$$

amb les condicions de contorn

$$u = v = w = 0, \quad \text{a } r = 1, \quad (14)$$

i on els operadors diferencials $\tilde{\nabla}$ i $\tilde{\Delta}$ que apareixen a (10–12) són:

$$\tilde{\nabla} = u \partial_r + \frac{v}{r} \partial_\theta + w \partial_z, \quad (15)$$

i

$$\tilde{\Delta} = \partial_{rr}^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 + \partial_{zz}^2. \quad (16)$$

En general, el sistema d'equacions (10–13) no es pot resoldre analíticament, ja que són equacions en derivades parcials no lineals i la seva complexitat fa impracticable l'ús de mètodes estàndard per resoldre'ls. Malgrat tot, aquest problema admet una solució senzilla si assumim que el camp de velocitats és estacionari, paral·lel a l'eix del cilindre i únicament dependent de la variable radial. En aquest cas, el sistema (10–13) admet la solució clàssica de Hagen-Poiseuille:

$$p = \text{cnst.}, \quad (17)$$

$$v_{\text{HP}} = (0, 0, 1 - r^2). \quad (18)$$

Amb les unitats escollides per adimensionalitzar, aquest perfil parabòlic té una velocitat màxima unitat a l'eix del cilindre o *center-line*. Aquesta és la raó per la qual hem introduït el factor 4 a la definició de $[T]$. Altres autors fan ús d'una definició equivalent del nombre de Reynolds

$$\text{Re} = \frac{a U_{\text{CL}}}{\nu}, \quad (19)$$

on $U_{\text{CL}} = [L]/[T] = \pi_0 a^2 / 4\mu$ és la velocitat màxima a l'eix i $\nu = \mu/\rho$ és la viscositat cinemàtica. Com que el flux no està acotat en la direcció axial, suposarem que la canonada té una longitud dimensional L i assumirem L -periodicitat del camp de velocitats en aquesta direcció. Per tant, treballarem dins del domini següent:

$$(20)$$

on $\Lambda = L/a$ és la longitud adimensional o *relació d'aspecte* de la canonada, mesurada en unitats de radi. La figura 2 mostra el camp i el domini adimensionalitzats del problema de Hagen-Poiseuille.

Experimentalment, el fluid prové d'un gran reservori connectat a la canonada. Suficientment lluny del punt d'entrada del fluid, el flux que es desenvolupa a la canonada és el flux parabòlic de Hagen-Poiseuille, des d'ara anomenat FHP. A la pràctica, les canonades industrials o domèstiques, tot i ser cilíndriques i suficientment llargues, no presenten el flux parabòlic. El soroll extern, les vibracions o les anomalies en la geometria contribueixen a inestabilitzar el flux, i donen lloc a un règim turbulent. Amb un gradient de pressió fixat, l'FHP maximitza el cabal resultant, ja que és un flux purament axial. Qualsevol altra distribució de velocitats fa que el cabal disminueixi i és per això que la turbulència en aquest problema és tan important.

3 Estabilitat de l'FHP

La literatura especialitzada recull un ventall de nombres de Reynolds *crítics* pels quals l'FHP es torna inestable al laboratori. Experiments fets sense gaire cura poden donar nombres de Reynolds crítics al voltant de $\text{Re} = 2000$, mentre que un experiment fi pot arribar fins a nombres de Reynolds superiors a $\text{Re} = 20000$ amb laminaritat. Tot sembla indicar que la transició és molt sensible a la magnitud de les pertorbacions externes i aquesta susceptibilitat augmenta a mesura que augmenta el nombre de Reynolds.

El problema de l'FHP difereix notablement d'altres problemes clàssics d'estabilitat hidrodinàmica com ara el problema de Couette-Taylor (flux entre dos cilindres coaxials que giren independentment al voltant d'un eix comú) o de Rayleigh-Bènard (flux entre dues plaques sotmeses a un gradient de temperatura). Ambdós problemes mostren inestabilitats ben definides per a valors concrets dels seus paràmetres de control. D'altra banda, el flux bàsic inestabilitzat no transita generalment a turbulència sinó a altres fluxos laminars amb coherència espacial temporal (vòrtex de Taylor o cel·les de Bènard). En el cas de l'FHP, el flux laminar pateix una transició *directa* a la turbulència sense mostrar estats laminars secundaris.

3.1 Anàlisi lineal

El primer pas per a l'estudi de l'estabilitat d'un flux solució de l'equació de Navier-Stokes és l'anomenada *linealització*. És a dir, s'estudia com evoluciona una pertorbació infinitesimal del flux. Suposem que ara el camp de velocitats solució del problema (10–13) és la suma de l'FHP de (18) més una pertorbació d'amplitud molt petita, *i. e.*,

$$(u, v, w) = v_{\text{HP}}(r) + \varepsilon (u', v', w'), \quad (21)$$

$$p = \text{cnst.} + \varepsilon q', \quad (22)$$

amb $|\varepsilon| \ll 1$. El camp de pertorbacions $u' = (u', v', w')$, per construcció, ha de satisfer incompressibilitat i s'ha d'anul·lar a la paret de la canonada, és a dir:

$$\nabla \cdot u' = 0, \quad u'(1, \theta, z, t) = 0. \quad (23)$$

La substitució dels camps pertorbats (21–22) a les equacions (10–13) dóna lloc a una jerarquia d'equacions per a potències de ε . L'equació linealitzada per a la pertorbació és la resultant de negligir termes d'ordre superior a $\mathcal{O}(\varepsilon)$:

$$\partial_t u' = -\partial_r q' - w_b \partial_z u' + \frac{1}{\text{Re}} \left(\tilde{\Delta} u' - \frac{2\partial_\theta v' - u'}{r^2} \right) \quad (24)$$

$$\partial_t v' = -\frac{\partial_\theta q'}{r} - w_b \partial_z v' + \frac{1}{\text{Re}} \left(\tilde{\Delta} v' + \frac{2\partial_\theta u' - v'}{r^2} \right) \quad (25)$$

$$\partial_t w' = -\partial_z q' - w_b \partial_z w' - w' \partial_z w_b + \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\Delta} w', \quad (26)$$

amb

$$\partial_r u' + \frac{\partial_\theta v'}{r} + \partial_z w' + \frac{u'}{r} = 0, \quad (27)$$

i on $w_b = 1 - r^2$. Aquest sistema d'equacions és lineal i homogeni. D'altra banda, el domini és periòdic en les variables azimuthal i axial (θ, z). Això ens permet descompondre el problema (24–26,27) en *modes normals*. És a dir, el sistema admet una descomposició en modes de Fourier de la forma

$$u'_{nk} = e^{\lambda_{nk} t} e^{i(n\theta + kz)} (u'_{nk}(r), v'_{nk}(r), w'_{nk}(r)), \quad (28)$$

$$q'_{nk} = e^{\lambda_{nk} t} e^{i(n\theta + kz)} q'_{nk}(r), \quad (29)$$

amb $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$ i $\lambda_{nk} \in \mathbb{C}$. Això vol dir que, linealment, la pertorbació u' és una superposició de modes u'_{nk} cadascun dels quals té una periodicitat axial i azimuthal específiques. Tanmateix, l'evolució temporal de cada mode u'_{nk} és *independent* dels altres modes, ja que l'únic acoblament a les equacions (24–26,27) té lloc amb el terme del flux bàsic $w_b = 1 - r^2$, corresponent al mode $(n, k) = (0, 0)$. L'evolució temporal de u_{nk} ve determinada per l'exponent complex λ_{nk} . Concretament, si $\Re(\lambda_{nk}) > 0$, el mode normal (n, k) serà *linealment inestable* mentre que si $\Re(\lambda_{nk}) < 0$ el mode serà *linealment estable*.

Introduint u'_{nk} i q'_{nk} a (24–26,27) obtenim un sistema d'equacions diferencials ordinàries independents per cada parell azimuthal axial (n, k) ¹,

$$\lambda u' = -\frac{dq'}{dr} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\tilde{\Delta} u' - \frac{2in v' + u'}{r^2} \right) - ik w_b u' \quad (30)$$

$$\lambda v' = -\frac{in}{r} q' + \frac{1}{\text{Re}} \left(\tilde{\Delta} v' + \frac{2inu' - v'}{r^2} \right) - ik w_b v' \quad (31)$$

$$\lambda w' = -\frac{ik}{r} q' + \frac{1}{\text{Re}} \tilde{\Delta} w' - u' w_b - ik w_b w', \quad (32)$$

amb l'operador $\tilde{\Delta}$ definit com

$$\tilde{\Delta} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} - k^2. \quad (33)$$

El mode normal ha de satisfer la condició de divergència zero

$$\frac{du'}{dr} + in \frac{v'}{r} + ik w' + \frac{u'}{r} = 0, \quad (34)$$

¹Per claredat, hem suprimit el subíndex nk .

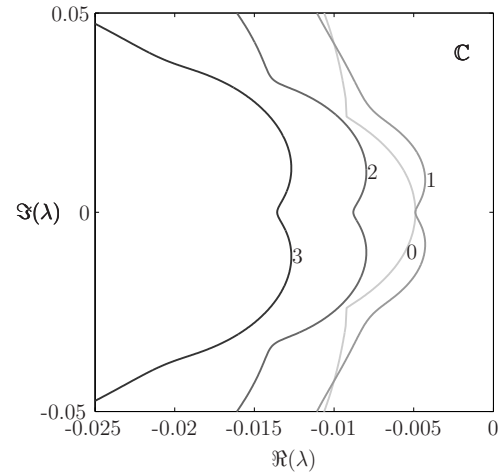


Figura 3: Espectre de valors propis corresponent al problema de contorn (30–32,34,35) per a $\text{Re} = 3000$. Els nombres indiquen el mode azimuthal de la pertorbació

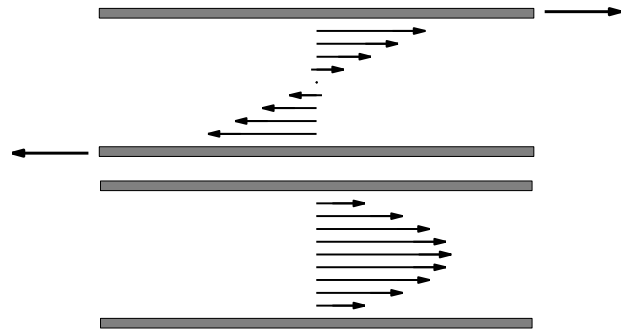


Figura 4: Marc superior: flux de Couette pla (fcp) confinat entre dos plans paral·lels que llisquen oposadament. Marc inferior: flux de Poiseuille (FP) resultant d'imposar un gradient de pressió paral·lel i uniforme als plans que contenen el fluid

així com la condició de contorn homogènia a la paret

$$u'(1) = v'(1) = w'(1) = 0. \quad (35)$$

El sistema format per les equacions (30–32,34,35) és un problema lineal de valors a la frontera bastant complex que s'ha de resoldre mitjançant mètodes numèrics adients. Sense cap dubte, els mètodes que proporcionen més precisió són els *mètodes espectrals* (Canuto et al., 2007). Això permet determinar l'espectre de valors i vectors propis λ_{nk} i $(u'_{nk}(r), v'_{nk}(r), w'_{nk}(r))$ amb la mateixa precisió que si els poguéssim calcular mitjançant tècniques analítiques. La figura 3 mostra part de l'espectre de valors propis calculat amb un mètode espectral. Per als modes azimuthals $n = 0, 1, 2, 3$, hem representat el valor propi de part real més gran parametritzat en funció del nombre d'ona axial dins de l'interval $k \in [-0.2, 0.2]$. Tots els va-

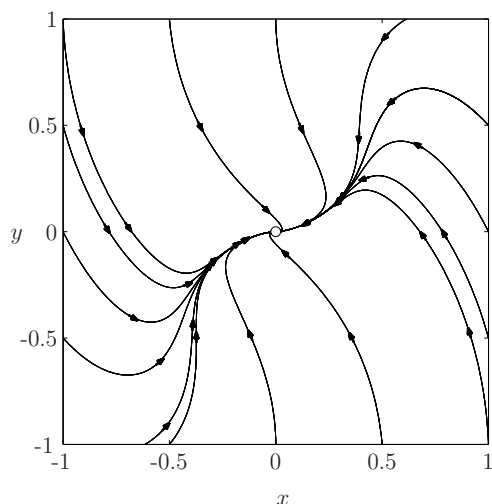


Figura 5: Mapa de fase del model de Cornell per a $Re = 2$

lors propis tenen part real negativa, i això vol dir que les perturbacions infinitesimals decauen a zero per a temps suficientment llarg. Un augment del nombre de Reynolds fa que les corbes representades en la figura 3 s'apropin a l'eix imaginari, però mai que el tallin.

Tot i que encara no hi ha una demostració formal, la comunitat científica especialitzada en estabilitat hidrodinàmica admet que el problema de contorn (30–32,34,35) mai té valors propis amb part real positiva, *i. e.*, l'FHP és linealment estable per a qualsevol nombre de Reynolds (Drazin, 2002; Meseguer i Trefethen, 2003). La paradoxa del problema és que, malgrat tot, l'FHP és estable enfront de perturbacions infinitesimals per a tot nombre de Reynolds, aquest flux es torna inestable i turbulent a la pràctica. La teoria lineal estableix que els fluxos que presenten espectres amb part real positiva són inestables i pateixen el que es coneix com una *bifurcació local*, és a dir, un canvi a la topologia del seu espai de fase a un veïnatge de la solució. L'FHP no presenta mai bifurcacions locals.

L'FHP comparteix la mateixa patologia que altres fluxos fonamentals de la dinàmica de fluids, com per exemple el flux de Couette pla (FCP) o el flux de Poiseuille (fp). L'FCP és el flux que apareix a un fluid viscos confinat entre dos plans paral·lels que llisquen inercialment en sentits oposats, tal com es mostra a la part superior de la figura 4. En l'FP el fluid també està confinat entre dos plans paral·lels, però el moviment és induït per un gradient de pressió paral·lel als plans, i forma un perfil parabòlic representat a la part inferior de la figura 4. En el cas de l'FCP, s'ha demostrat formalment que aquest flux sempre és linealment estable, mentre que l'FP presenta una inestabilitat lineal per a $Re = 5772$. Tot i això, diversos experiments conclouen que l'FCP transita a la turbulència per a $Re \sim 400$ i que l'FP presenta el mateix comporta-

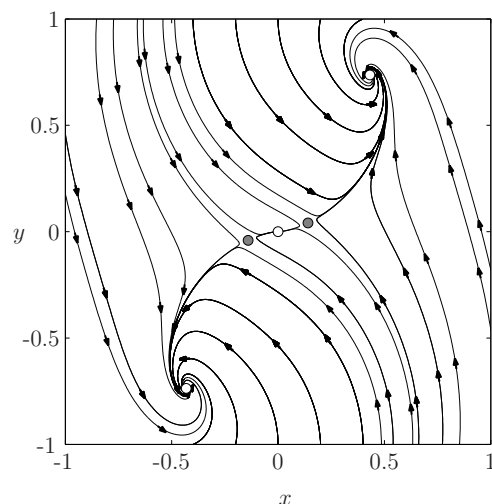


Figura 6: Mapa de fase del model de Cornell per a $Re = 4$

ment per a $Re \sim 1800$, molt per sota del valor que prediu la teoria lineal. Aquest i altres fluxos bàsics que es tornen inestables per sota dels valors que prediu la teoria lineal s'anomenen *subcrítics*, i actualment es troben al capdavant de la recerca fonamental a la teoria de la transició a la turbulència. Com a anècdota curiosa, al voltant del 1920, el físic alemany i un dels pares de la mecànica quàntica, Werner Heisenberg, va ser el primer a intentar resoldre el problema de transició a l'FP, sense èxit.

3.2 Models de baixa dimensió

La fenomenologia descrita ens porta a plantejar-nos fins a quin punt la teoria d'estabilitat lineal és rellevant a l'hora de predir inestabilitats hidrodinàmiques a fluxos oberts dominats per cisalla. Per entendre millor el fenomen de les inestabilitats subcrítics s'han desenvolupat models de baixa dimensió que reproduïxen aquest tipus de comportament i que, simultàniament, són tractables de manera analítica.

El model que a continuació descriurem és el *model de Cornell* (Trefethen et al., 1993), que porta el nom de la universitat on es va desenvolupar. Aquest és un sistema dinàmic bidimensional que ve definit per les equacions

$$\dot{x} = -\frac{1}{Re}x + y - y\sqrt{x^2 + y^2} \quad (36a)$$

$$\dot{y} = -\frac{2}{Re}y + x\sqrt{x^2 + y^2}. \quad (36b)$$

En aquest sistema, el paràmetre Re (sempre positiu) representa el nombre de Reynolds i controla la topologia de l'espai de fase. L'origen $(0, 0)$ és un punt estacionari (*node*) linealment estable per a tot valor de Re , amb valors propis $\lambda_1 = -1/Re$ i $\lambda_2 = -2/Re$. El mapa de fase per a $Re = 2$ s'ha representat en la figura 5.

Per a $Re > \sqrt{8}$, aquest sistema admet altres solucions

no trivials. Concretament dos *focus* estables:

$$f_{\pm} : \pm \frac{2\beta_{\pm}}{\text{Re}\sqrt{1+\beta_{\pm}^2}} (1, \beta_{\pm}), \quad (37)$$

i dos *nodes sella* inestables:

$$ns_{\pm} : \pm \frac{2\beta_{\pm}}{\text{Re}\sqrt{1+\beta_{\pm}^2}} (1, \beta_{\pm}) \quad (38)$$

amb

$$\beta_{\pm} = \frac{\text{Re}}{4} \left(1 \pm \frac{1}{\text{Re}} \sqrt{\text{Re}^2 - 8} \right). \quad (39)$$

La figura 6 mostra el mapa de fase per a $\text{Re} = 4$. Les òrbites a prop del node estable hi convergeixen en direccions paral·leles als seus dos vectors propis (tot i que poden experimentar un creixement transitori inicial). Les òrbites que s'apropen als nodes sella inestables (gris) divergeixen, i s'apropen o bé a la solució trivial o bé als focus (blanc). Aquest comportament és típic dels nodes sella; les òrbites properes inicialment convergeixen al punt paral·leles al vector propi estable i després s'allunyen en la direcció del vector propi inestable. Posteriorment, les òrbites que s'escapen del node sella poden convergir al node estable o bé caure als focus amb trajectòries espirals ja que els valors propis dels focus són complexos conjugats de part real negativa. Clarament, la varietat estable dels nodes sella constitueix la frontera de la conca d'atracció de la solució trivial. Aquests nodes sella sorgeixen per a $\text{Re} > \sqrt{8}$ mitjançant una *bifurcació global* mentre que l'origen manté les seves propietats d'estabilitat. A mesura que Re augmenta, les coordenades dels nodes sella s'aproximen a l'origen asimptòticament com $x \sim \mathcal{O}(\text{Re}^{-2})$ i $y \sim \mathcal{O}(\text{Re}^{-3})$. Això implica que qualsevol condició inicial d'amplitud petita propera a l'origen té moltes possibilitats d'escapar-se als focus. La distància dels nodes a l'origen escala com Re^{-2} i això fa que la conca d'atracció sigui cada vegada més fina.

Podem interpretar el sistema (36) com un model reduït que descriu l'evolució de pertorbacions d'un flux subcrític, on (x, y) representa una pertorbació u , l'origen $(0, 0)$ és el flux bàsic linealment estable per a tot Re , i els focus són atractors que representen l'estat turbulent.

El model de Cornell ha estat criticat perquè la part no lineal, si bé conserva l'energia, no pot representar les regles de selecció de les equacions de Navier-Stokes. Altres models de baixa dimensió s'han proposat recentment amb un rerefons més adient dins de l'entorn de la dinàmica de fluids. Tot i això, el model de Cornell conté els ingredients bàsics que fan entenedora la fenomenologia subcrítica.

4 La frontera crítica de l'FHP

En el model de Cornell, la frontera de la conca d'atracció de l'origen ve determinada per les varietats estables dels nodes sella. De fet, la presència d'aquests nodes sella inestables condiciona l'estabilitat feble de l'origen. En

aquest sentit, l'explicació que s'ha donat a la inestabilització de l'FHP ha estat la presència de solucions tipus sella inestables que s'apropen al flux bàsic i que condicionen la topologia de la seva conca d'atracció. Per tant, si fos cert que el que provoca la transició a la turbulència són solucions inestables a prop de l'FHP, aquestes s'haurien de poder trobar d'una manera o altra. El problema és que aquestes solucions són inestables, i tant els experiments com les simulacions numèriques no podran trobar-les de manera natural. Ara bé, la dinàmica a prop d'aquestes solucions inestables és lenta. Les trajectòries del model de Cornell per a $\text{Re} = 4$ que s'apropen suficientment als nodes sella exhibeixen llargs episodis de relaxació just abans de fugir cap als focus o relaminaritzar cap a l'origen. En el model de Cornell, coneixem *a priori* la localització del node sella, mentre que al problema de Navier-Stokes la localització d'aquestes solucions inestables és *a priori* desconeguda. Malgrat tot, ens podem apropar transitòriament a aquestes solucions pertorbant el flux bàsic amb un camp arbitrari i escalant-ne l'amplitud inicial amunt o avall fins que aquesta és suficientment gran per iniciar la turbulència. Una vegada hem trobat dos valors propers de l'amplitud, un amb transició (A_{trans}) i l'altre amb relaminarització (A_{lam}), podem començar una iteració més fina dins l'interval $[A_{\text{trans}}, A_{\text{lam}}]$.

A l'hora de la veritat, portar a terme aquesta anàlisi és tècnicament complicat. Primer, les equacions linealitzades (24–26,27) ja no són vàlides i hem de recórrer a l'equació de la pertorbació sense l'aproximació a primer ordre:²

$$\partial_t u = -\nabla q + \frac{1}{\text{Re}} \Delta u - (v_{\text{HP}} + u) \cdot \nabla (v_{\text{HP}} + u). \quad (40)$$

Aquesta equació és no lineal, en derivades parcials i dependent del temps. La seva integració (òbviament numèrica) requereix sofisticats mètodes espectrals en espai combinats amb acurats esquemes semiimplícits en temps. Típicament, una integració qualsevol pot arribar a implicar entre 10^4 i 10^6 graus de llibertat acoblats no linealment. El cost computacional és considerable i moltes vegades es requereix paral·lelització dels algorismes. Estalviarem al lector detalls tècnics que comporten l'esmentada integració i ens limitarem als resultats.

4.1 Apropant-se a la frontera

Sigui $u_0 = u(t=0)$ una pertorbació inicial del problema (40) que inestabilitza a l'FHP. Considerem ara un conjunt de condicions inicials de la forma Au_0 , amb $A \in [0, 1]$. Òbviament, per a $A = A_{\text{trans}} = 1$ tenim transició i per a $A = A_{\text{lam}} = 0$ tenim un flux laminar. Podem repetir l'experiment per amplituds intermèdies que, o bé donen lloc a turbulència, o bé relaminaritzen. Suposem que, finalment, tenim dues amplituds molt semblants $A_1 = A_{\text{lam}}$

²D'ara endavant, suprimirem la titlla de la pertorbació.

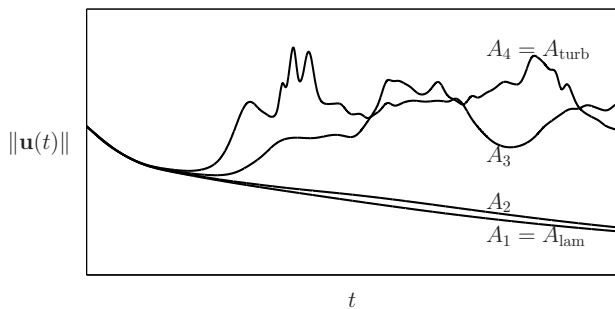


Figura 7: Evolució temporal de $\|u(t)\|$ per a diferents valors de l'escalat A . La trajectòria d'amplitud A_3 , just abans de transitar a la turbulència, mostra un episodi de relaxació on $\|u\| \sim 0$

i $A_4 = A_{\text{turb}}$ ($A_{\text{lam}} < A_{\text{turb}}$) que donen lloc a relaminarització i a turbulència, respectivament. Si ara pertorbem el flux amb amplituds intermèdies A_2 i A_3 (amb, $A_1 < A_2 < A_3 < A_4$) i monitorem la norma de la pertorbació en funció del temps obtinguda mitjançant la simulació numèrica podem observar el comportament que es visualitza en la figura 7. Podríem continuar fent un refinament més acurat fins a trobar aquesta amplitud crítica amb més precisió. Podem observar que totes les trajectòries comencen amb una amplitud inicial pràcticament idèntica (la diferència no es pot apreciar gràficament). Després d'un cert transitori, les trajectòries divergeixen i formen una estructura de *cremallera* entreoberta. Entre els valors inicials A_2 i A_3 sempre podem trobar un ventall d'amplituds inicials que discriminen entre trajectòries turbulentes o bé relaminaritzades. Repeticions successives d'aquest procés de refinament ens apropen a la varietat estable del conjunt topològic que constitueix la frontera de la conca d'atracció de l'FHP. En el model de Cornell, aquest conjunt topològic és simplement una corba. En el problema de l'FHP aquest conjunt és bastant més complicat i la dinàmica pot ser caòtica. Tot i això, sabem que les trajectòries, just abans de relaminaritzar o transitar a la turbulència, experimenten episodis de relaxació, com el que es mostra en la figura 7, on la variació temporal de l'amplitud de la pertorbació és molt petita. Aquestes fases transitòries de quasiestacionarietat, poden donar-nos pistes sobre la localització dels nodes sella que estem buscant. Si analitzéssim el flux durant aquests episodis de dinàmica lenta i poguéssim identificar-hi coherència espacial, podria donar-se el cas que ens trobéssim propers a una solució node sella del problema de Navier-Stokes (40).

L'anàlisi abans descrita s'ha portat a terme per a $Re = 2875$ amb una canonada de longitud $\Lambda = 10$. Un refinament de les amplituds de pertorbació inicial i un monitoratge posterior del camp de velocitats ens han permès identificar una estructura transitòria durant l'episodi de

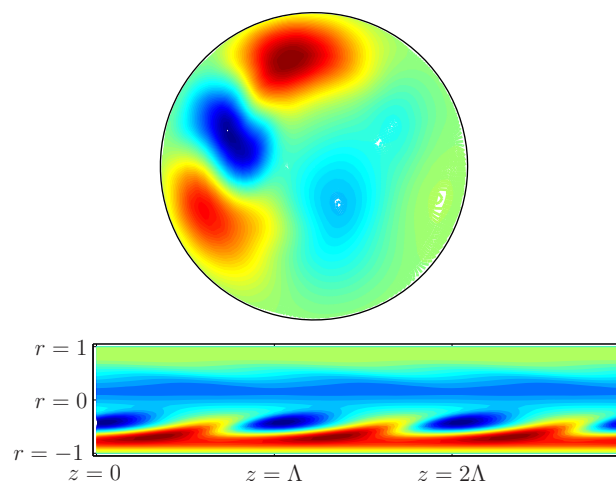


Figura 8: Estructura transitòria de dinàmica lenta. Marc superior: mapa de contorn de la velocitat axial en una secció $z = \text{const}$. Marc inferior: mapa de contorn en una secció $\theta = \text{const}$. Vermell i blau representen velocitats axials grans i petites, respectivament

relaxació. En la figura 8 hem representat el camp de velocitats axials d'aquesta estructura transitòria en una secció transversal de la canonada (marc superior) i en una secció diametral longitudinal (marc inferior). Aquesta estructura ha estat identificada molt recentment per un grup de recerca alemany dirigit per B. Eckhardt de la Universitat de Marburg (Eckhardt et al., 2007) fent ús de tècniques similars. Aquest flux transitori està caracteritzat per una distribució de velocitats radials molt peculiar on apareixen dues regions de velocitat axial alta (anomenades *streaks*) que acoten una regió de baixa velocitat. El flux sembla ser periòdic en la direcció axial amb una longitud d'ona d'uns pocs diàmetres de canonada i sembla viatjar a una velocitat axial constant.

Si es repeteix reiteradament el procés de refinament d'amplituds inicials per integracions temporals llargues, s'obté una trajectòria a l'espai de fase del problema que és caòtica. Molt sovint, aquesta trajectòria caòtica visita l'estructura abans esmentada. És a dir, sembla que aquesta estructura es troba inclosa en una hipersuperfície separatriu que discrimina dinàmiques relaminaritzants i turbulentes. En el model de Cornell aquesta hipersuperfície està constituïda per les corbes de varietats estables que conflueixen als nodes sella. En el problema de l'FHP, la dinàmica té més graus de llibertat tot i que els resultats mostrats indiquen la possibilitat que hi hagi solucions de tipus sella amb dinàmica de baixa dimensió.

4.2 Ones viatgeres

Si al model de Cornell la separatriu neix als nodes sella, quin tipus de selles constitueixen la frontera al problema de l'FHP? Igual que per a $Re > \sqrt{8}$, el model de Cornell

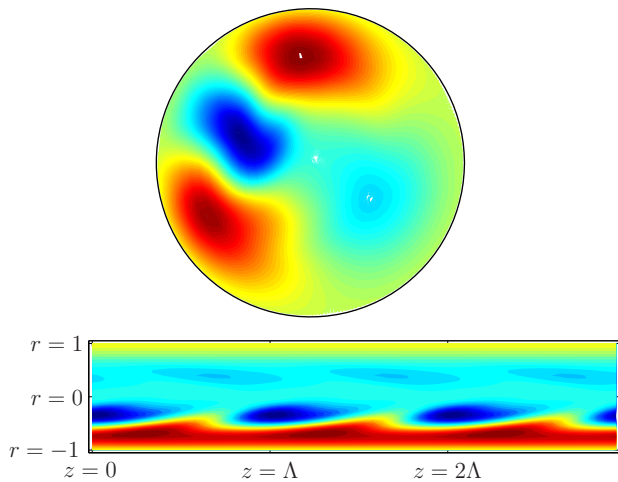


Figura 9: *Ona viatgera convergida amb MNK utilitzant l'estat transitori representat en la figura 8 com a llavor inicial. Marc superior: mapa de contorn de la velocitat axial en una secció $z = \text{cnst}$. Marc inferior: mapa de contorn en una secció $\theta = \text{cnst}$. Vermell i blau representen velocitats axials grans i petites, respectivament*

admet altres solucions estacionàries diferents a la trivial, per a un nombre de Reynolds fixat arbitrari, l'equació no lineal (40) admet en general altres solucions o fluxos diferents a la solució $u = 0$. En alguns problemes clàssics de la teoria d'estabilitat hidrodinàmica, aquestes solucions secundàries són estables i es poden trobar tant experimentalment com computacionalment fent integracions temporals. El problema essencial de l'anàlisi d'estabilitat de l'FHP és que no té altres solucions laminars estables (o, si més no, no s'han trobat encara). Els nodes sella que busquem són inestables i no es podran trobar *mai* experimentalment o mitjançant esquemes d'evolució temporal computacionals. Si bé ens hi podem apropar computacionalment (i tenim evidències que això és així), tard o d'hora la trajectòria numèrica patirà una repulsió en la direcció o direccions de la varietat inestable d'aquestes solucions i mai convergirem a elles.

Pretenem identificar quines són aquestes selles o solucions responsables de la transició. El primer pas consisteix a plantejar-nos quin tipus de solucions admet el problema. El gradient de pressió imposat trenca la simetria en la direcció axial i això fa que altres solucions estacionàries no siguin admeses. Les solucions secundàries més senzilles consisteixen en ones viatgeres (o *travelling waves*, *tw*), és a dir, estructures periòdiques en la variable z i que viatgen en el mateix sentit que el flux bàsic, amb una velocitat indeterminada c . Suposarem que aquestes satisfan

$$u_{TW}(r, \theta, z, t) = u(r, \theta, z - ct). \quad (41)$$

Això és equivalent a dir que aquesta solució és estacionària en un sistema de referència *co-moving* que es desplaça

amb l'ona en qüestió a una velocitat axial c . Si introduïm aquest tipus de solució a l'equació (40) eliminem la variable temporal del problema. El preu que paguem a canvi és introduir una nova incògnita: la velocitat de propagació de l'ona c , per determinar.

Per trobar les solucions de l'equació (40) aproximem el camp de perturbacions u mitjançant un desenvolupament espectral solenoidal de la forma

$$u = \sum_{(l,n,m)=(-L,-N,0)}^{(L,N,M)} a_{lnm}(t) e^{i(k_0 l z + n \theta)} v_{lnm}(r), \quad (42)$$

amb $k_0 = 2\pi/\Lambda$, i on les funcions v_{lnm} satisfan divergència zero. El mètode de Galerkin espectral consisteix a introduir l'aproximació (42) a (40) i trobar l'evolució temporal dels coeficients $a_{lnm}(t)$ que són els que dicten la dinàmica temporal de la perturbació. La projecció de l'equació aproximada sobre cada subespai de Fourier dona lloc a un sistema dinàmic per les amplituds $a_{lnm}(t)$ amb aquesta estructura:

$$A \dot{a} = B a + N(a), \quad (43)$$

on els operadors A i B són les projeccions espectrals de la part lineal temporal i espacial de (40) i on N és la projecció del terme advectiu no lineal. Aquesta formulació ens ha permès simular l'evolució temporal de qualsevol perturbació a la secció anterior. Malgrat tot, l'evolució d'aquest sistema dinàmic mai convergirà a les solucions inestables que delimiten la conca d'atracció de l'FHP, tal com hem pogut comprovar.

Si suposem que les nostres solucions inestables tenen estructura d'ones viatgeres que satisfan (41), els coeficients de la nostra aproximació espectral (43) adopten aquesta forma particular:

$$a_{lnm}(t) = \hat{a}_{lnm} e^{-i l k_0 c t}, \quad (44)$$

on els coeficients complexos \hat{a}_{lnm} són constants. Substituint l'expansió (42) amb coeficients del tipus (44), el mètode de Galerkin dona lloc a un sistema algebraic no lineal independent del temps per cada parell axial azimuthal (l, n) :

$$F_{ln}(\hat{a}, c) = (i l k_0 c A_{ln} + B_{ln}) \hat{a}_{ln} + N_{ln}(\hat{a}) = 0, \quad (45)$$

amb

$$F_{ln} = 0, \quad (l, n) \neq (0, 0). \quad (46)$$

En aquest cas, A_{ln} , B_{ln} i N_{ln} són les clausures de A , B i N sobre el subespai de Fourier (l, n) , respectivament. Donada la gran dimensió del sistema (45), s'han de fer servir *mètodes de Newton-Krylov* inexactes (MNK).

Els MNK són mètodes que troben solucions de forma iterativa fent ús d'una solució aproximada inicial o *llavor*. És a dir, un *mnk* requereix una orientació inicial per poder

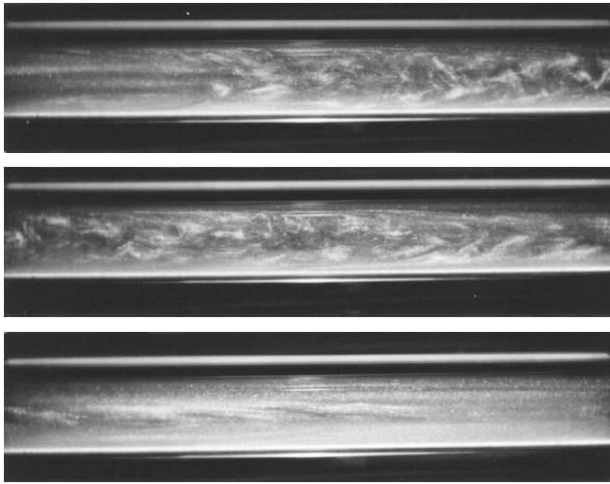


Figura 10: Puff obtingut experimentalment per a $Re = 2575$. El flux a la canonada és d'esquerra a dreta. Marcs superior, central i inferior mostren cua, centre i cap del puff, respectivament. Aquesta estructura es troba confinada dintre del flux laminar, el qual es pot percebre a l'esquerra del marc superior i a la dreta de l'inferior

tenir èxit. L'estat transitori identificat a la secció anterior mitjançant un mètode dinàmic pot ser una bona llavor (suposant que realment ens trobem a prop d'una solució viatgera). A la figura 9 hem representat la solució resultant d'aplicar el MNK amb la llavor inicial representada a la figura 8.

Aquest flux viatger és solució exacta del problema de Navier-Stokes (Mellibovsky i Meseguer, 2008) i ha estat trobat simultàniament per un grup de recerca britànic dirigit per R. R. Kerswell, de la Universitat de Bristol (Pringle i Kerswell, 2007). Aquesta solució sembla tenir un paper molt important en el procés de transició a l'fhp. Consisteix en un flux axialment periòdic que es mou amb velocitat constant paral·lela al flux bàsic i té essencialment les mateixes propietats que hem descrit en la secció anterior. Fa quatre o cinc anys, ja es van trobar altres ones viatgeres en aquest problema, però aquestes semblen tenir més importància en el desenvolupament i manteniment de la turbulència a les parets i no necessàriament a les fases inicials d'instabilitat (Hof et al.). En qualsevol cas, ha calgut més d'un segle per trobar altres solucions de les equacions de Navier-Stokes en una canonada i per començar a entendre els mecanismes que governen la transició a l'FHP.

4.3 Intermitència laminar turbulenta

Una condició inicial a prop de la solució que acabem de trobar pot relaminaritzar o bé transitar a un estat de turbulència *global*, és a dir, on el flux és turbulent a *tot* el domini de la canonada. La turbulència global té lloc quan el nombre de Reynolds és suficientment gran ($Re = 2875$

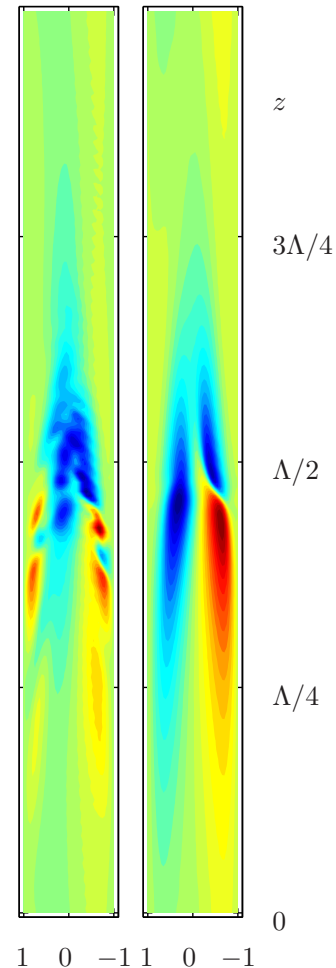


Figura 11: Esquerra: secció diametral longitudinal d'una estructura preturbulenta intermitent (puff) a la seva fase de relaxació ($Re = 2000$). Vermell i blau representen velocitats axials grans i petites, respectivament. El flux entra per la part inferior i surt per la part superior. Dreta: mateixa secció de l'estat convergit amb l'MNK

en el cas estudiat abans). No obstant això, les primeres transicions que apareixen a l'FHP es troben per nombres de Reynolds més moderats i estan caracteritzades per un fenomen denominat *intermitència*, on flux laminar i flux turbulent conviuen a diferents parts del domini. Osborne Reynolds ja va reparar en aquesta fenomenologia descrivint-la en el seu article de 1883 de la manera següent:

«Altre fenomen [...] era el caràcter intermitent de la pertorbació. Aquesta pertorbació apareixia de forma sobtada en zones concretes de la canonada, per a després desaparèixer i reaparèixer de nou, en forma de centelleigs que, sovint, tenien el seu inici en un punt del tub.»

Estudis experimentals posteriors al de Reynolds confirmen la fenomenologia descrita. És a dir, el flux a la canonada no es torna turbulent fins a nombres de Reynolds al

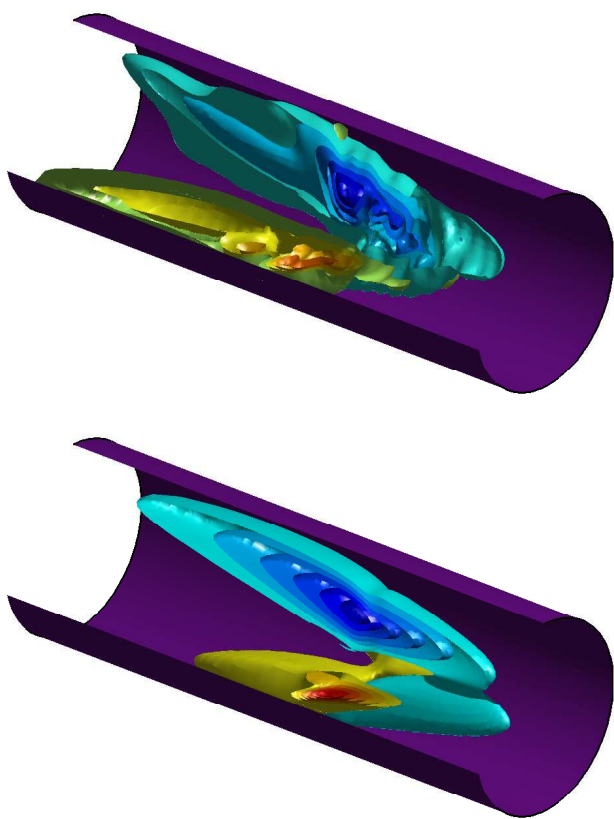


Figura 12: Marc esquerre: isosuperfícies de velocitat axial de l'estructura preturbulenta per a $Re = 2000$. Marc dret: estructura laminar resultant d'aplicar l'algorisme d'MNK a l'estat preturbulent. En l'escala diametral longitudinal s'han de poder visualitzar millor les estructures i s'ha extret un quadrant del domini per tenir una millor idea de l'estructura interna del flux

voltant de $Re = 2000$, i aquesta inestabilitat *no* dona lloc a turbulència global, sinó a un flux en el qual coexisteixen turbulència i laminaritat. Els experiments han observat sistemàticament aquesta intermitència per a nombres de Reynolds entre 1900 i 2700, aproximadament. Les estructures turbulentes que apareixen en forma de centelleigs són clarament localitzades, tenen una extensió de desenes de diàmetres i són el primer símptoma de transició a l'FHP. Aquestes estructures reben el nom de *puffs*, són molt robustes i mantenen la seva longitud durant tot l'experiment. La figura 10 mostra la fotografia d'un puff obtingut experimentalment per a $Re = 2570$. Per la seva extensió, el puff ha estat seccionat en les seves tres parts principals.

Recentment s'ha qüestionat si els puffs són solucions estables de l'equació de Navier-Stokes o, per contra, són simplement un fenomen transitori. Experimentalment, és difícil determinar les propietats d'estabilitat dels puffs, atès que les canonades tenen una longitud finita i els puffs

acaben tard o d'hora abandonant el domini. La simulació computacional soluciona aquest problema mitjançant les condicions de contorn periòdiques a l'entrada i a la sortida de la canonada. Un puff simulat computacionalment amb aquestes condicions torna a entrar al domini tan aviat com el deixa enrere.

Entendre la dinàmica inherent al fenomen intermitent és clau per entendre el fenomen de transició a l'FHP. Aquest fenomen es troba a mig camí entre la laminaritat i la turbulència global. No podem entendre la turbulència completament desenvolupada sense abans entendre la fase prèvia. Hem repetit el procés d'escalar amplituds de pertorbació per trobar estats de relaxació a canonades de longitud més gran ($\Lambda = 100$) i per a nombres de Reynolds més moderats ($Re = 2000$). El resultat d'una d'aquestes exploracions es mostra en la figura 11, on hem representat l'estat de relaxació transitori (marc superior) i el seu corresponent estat convergint amb l'MNK (marc inferior). Per visualitzar millor l'estructura, hem escalat la relació d'aspecte adequadament.

Per entendre millor l'estructura interna d'aquests tipus de fluxos, hem visualitzat tridimensionalment isosuperfícies de mateixa velocitat axial en la figura 12. Hem extret un quadrant del domini per poder visualitzar l'estructura interna del flux.

La precisió amb la qual els MNK han convergint aquesta solució no és tan bona com l'obtinguda a les ones viatgeres de l'apartat anterior. Això és degut a la gran dimensionalitat del problema algebraic resultant de discretitzar el problema. En aquest cas, el sistema (45) té al voltant de $7 \cdot 10^4$ graus de llibertat. La computació de l'estructura mostrada en les figures 11 i 12 requereix diverses setmanes de càlcul paral·lel a un processador actual. En aquest moment estem optimitzant la resolució numèrica per determinar aquest tipus d'estructures amb més precisió.

5 Conclusions

Hem presentat els darrers resultats obtinguts referents a l'estudi de la transició a la turbulència a l'FHP. La simplicitat del problema contrasta notablement amb l'enorme dificultat que suposa entendre'n la dinàmica. Formulats fa més d'un segle, aquest problema ha desafiat físics i matemàtics del segle xx. Per primera vegada, i gràcies a la computació i a la teoria de sistemes dinàmics, s'han començat a entreveure els mecanismes interns que governen la transició a la turbulència en aquest tipus de flux. Tot i això, encara queden moltes preguntes per resoldre. Encara no entenem quin és el rerefons físic d'aquestes solucions del problema de Navier-Stokes que delimiten la conca d'atracció de l'FHP. De moment, aquestes estructures són solucions del problema matemàtic. Determinar quins són els mecanismes que les fan aparèixer forma part de la recerca futura.

Bibliografia

CANUTO, C. et al., *Spectral Methods (Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics)*, Springer-Verlag, 2007. (Springer Scientific Computation).

DRAZIN, P.G., *Introduction to Hydrodynamic Stability*, Cambridge University Press, 2002. (Cambridge Texts in Applied Mathematics).

ECKHARDT, B. et al. "Turbulence transition in pipe flow". *Annual Review of Fluid Mechanics*. Vol. 39 (2007), p. 447.

HOF, B. et al. "Experimental observation of nonlinear travelling waves in turbulent pipe flow". *Science*. Vol. 305 (2004), p. 1594.

MELLIBOVSKY, F.; MESEGUER, A. "Critical threshold in pipe flow transition". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. Vol. 367 (2009), p. 545.

MESEGUER, A.; TREFETHEN, L. N. "Linearized pipe flow to Reynolds number 10^7 ". *Journal of Computational Physics*. Vol. 186 (2003), p. 178.

TREFETHEN, L. N. et al. "Hydrodynamic stability without eigenvalues". *Science*. Vol. 261 (1993), p. 678.

PRINGLE, C. i KERSWELL, R. R. "Asymmetric, helical and mirror-symmetric travelling waves in pipe flow". *Physical Review Letters*. Vol. 99 (2007), p. 074502.